Matemáticas 1 - **Parcial 1 - MA1111**

Resolución.

1. (4 ptos c/u) Resolver las siguientes inecuaciones

$$a. \quad \frac{26}{x-3} + 5 \geq \frac{7}{x-2} - x$$

Solución : Comparamos con cero

$$\frac{26}{x-3} + 5 \geq \frac{7}{x-2} - x \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{26}{x-3} + 5 - \frac{7}{x-2} + x \geq 0.$$

Efectuamos el lado diferente de cero

$$\frac{26}{x-3} + 5 - \frac{7}{x-2} + x = \frac{26\left(x-2\right) + 5\left(x-3\right)\left(x-2\right) - 7\left(x-3\right) + x\left(x-3\right)\left(x-2\right)}{\left(x-3\right)\left(x-2\right)}$$

$$= \frac{26x - 52 + 5\left(x^2 - 3x - 2x + 6\right) - \left(7x - 21\right) + x\left(x^2 - 3x - 2x + 6\right)}{\left(x-3\right)\left(x-2\right)}$$

$$= \frac{26x - 52 + 5\left(x^2 - 5x + 6\right) - 7x + 21 + x\left(x^2 - 5x + 6\right)}{\left(x-3\right)\left(x-2\right)}$$

$$= \frac{19x - 31 + 5x^2 - 25x + 30 + x^3 - 5x^2 + 6x}{\left(x-3\right)\left(x-2\right)} = \frac{x^3 - 1}{\left(x-3\right)\left(x-2\right)}$$

Factorizamos el polinomio del numerador, es conocido que

$$a^3 - b^3 = \left(a-b\right)\left(a^2 + ab + b^2\right),$$

así, con $a = x$ y $b = 1$, se obtiene

$$x^3 - 1 = \left(x-1\right)\left(x^2 + x + 1\right)$$

Así,

$$\frac{26}{x-3} + 5 - \frac{7}{x-2} + x \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\left(x-1\right)\left(x^2 + x + 1\right)}{\left(x-3\right)\left(x-2\right)} \geq 0.$$

Buscamos los puntos extremos de la expresión, para ello igualamos a cero cada término de los polinomios del numerador y del denominador

- Numerador $\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)$. De aquí,

$$x-1=0 \quad \Longrightarrow \quad x=1 \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad x^2+x+1=0 \ \text{ imaginarias.}$$

- Denominador $\left(x-3\right)\left(x-2\right)=0$. De aquí,

$$x-3=0 \quad \Longrightarrow \quad x=3 \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad x-2=0 \quad \Longrightarrow \quad x=2.$$

Estudiamos el signo de cada uno de los factores

	$-\infty$, 1	1 , 2	2 , 3	3 , $+\infty$
x^2+x+1	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
	$-$	$+$	$-$	$+$

Luego, la solución de la inecuación, que denotaremos por sol, viene dada por

$$sol : x \in \left[1,2\right) \bigcup \left(3,+\infty\right).$$

★

1. (4 ptos c/u) Resolver las siguientes inecuaciones

$$b. \quad \left|1-x^2-3x\right| \geq 2\left|x+\frac{1}{2}\right|$$

Solución : Tenemos que

$$2\left|x+\frac{1}{2}\right| = \left|2\right|\left|x+\frac{1}{2}\right| = \left|2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right| = \left|2x+1\right|,$$

así,

$$\left|1-x^2-3x\right| \geq 2\left|x+\frac{1}{2}\right| \qquad \Longrightarrow \qquad \left|1-x^2-3x\right| \geq \left|2x+1\right|.$$

Elevamos al cuadrado, la desigualdad **NO** cambia, pues el valor absoluto siempre es mayor o igual a cero

$$\left|1-x^2-3x\right| \geq \left|2x+1\right| \qquad \Longrightarrow \qquad \left|1-x^2-3x\right|^2 \geq \left|2x+1\right|^2,$$

como $\left|\left(\cdot\right)\right|^2 = \left(\cdot\right)^2$, entonces

$$\left|1-x^2-3x\right| \geq \left|2x+1\right| \qquad \Longrightarrow \qquad \left(1-x^2-3x\right)^2 \geq \left(2x+1\right)^2.$$

Resolvemos esta última inecuación

$$\left(1-x^2-3x\right)^2 \geq \left(2x+1\right)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \left(1-x^2-3x\right)^2 - \left(2x+1\right)^2 \geq 0$$

$$\Longrightarrow \qquad \Big(\left(1-x^2-3x\right)-\left(2x+1\right)\Big)\Big(\left(1-x^2-3x\right)+\left(2x+1\right)\Big) \geq 0$$

$$\Longrightarrow \qquad \left(1-x^2-3x-2x-1\right)\left(1-x^2-3x+2x+1\right) \geq 0$$

$$\Longrightarrow \qquad \left(-x^2-5x\right)\left(2-x^2-x\right) \geq 0$$

Factorizamos cada polinomio que se tiene en cada factor

(a) Para $p(x) = -x^2-5x$. Observemos que, $-x$ es factor común , así,

$$p(x) = -x^2-5x = -x\Big(x+5\Big).$$

(b) Para $q(x) = 2-x^2-x$. Por ser un polinomio de grado 2 aplicamos la resolvente para $\boldsymbol{a=-1}$, $\boldsymbol{b=-1}$ y $\boldsymbol{c=2}$

$$x = \frac{-\left(-1\right) \pm \sqrt{\left(-1\right)^2 - 4\left(-1\right)\left(2\right)}}{2\left(-1\right)} = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{-2} = \frac{1\pm\sqrt{9}}{-2}$$

$$= \frac{1\pm 3}{-2} = \begin{cases} \dfrac{1+3}{-2} = \dfrac{4}{-2} = -2 \\[2ex] \dfrac{1-3}{-2} = \dfrac{-2}{-2} = 1. \end{cases}$$

Entonces, el polinomio $q(x) = 2 - x^2 - x$ se factoriza como

$$q(x) = 2 - x^2 - x = -\left(x+2\right)\left(x-1\right).$$

Entonces, la inecuación

$$\left(-x^2 - 5x\right)\left(2 - x^2 - x\right) \geq 0$$

se escribe como

$$\left(-x\left(x+5\right)\right)\left(-\left(x+2\right)\left(x-1\right)\right) \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x\left(x+5\right)\left(x+2\right)\left(x-1\right) \geq 0.$$

Buscamos los puntos extremos de la expresión, para ello igualamos a cero cada término

$$x\left(x+5\right)\left(x+2\right)\left(x-1\right) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x = 0 & & \\ x+5 = 0 & \Longrightarrow & x = -5 \\ x+2 = 0 & \Longrightarrow & x = -2 \\ x-1 = 0 & \Longrightarrow & x = 1 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de cada uno de los factores

	$-\infty$ a -5	-5 a -2	-2 a 0	0 a 1	1 a $+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+5$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Luego, la solución de la inecuación, que denotaremos por sol, viene dada por

$$sol : x \in \left(-\infty, -5\right] \bigcup \left[-2, 0\right] \bigcup \left[1, +\infty\right).$$

★

2. (5 ptos) Encuentre la ecuación de la circunferencia, C, cuyo cento es $\left(-4,-1\right)$ y es tangente a la recta de ecuación

$$3x+2y-12=0.$$

Solución : La ecuación de la circunferencia viene dada por

$$\left(x+4\right)^2+\left(y+1\right)^2=r^2.$$

Calculamos el radio de la circunferencia. Puesto que, la recta

$$L: 3x+2y-12=0$$

es tangente a la circunferencia, entonces, la recta que pasa por el centro y por el punto de tangencia, recta que llamaremos L_1, es perpendicular a L.

Buscamos la ecuación de la recta L_1. De la recta L, se tiene

$$3x+2y-12=0 \quad \Longrightarrow \quad 2y=-3x+12 \quad \Longrightarrow \quad y=-\frac{3}{2}x+6,$$

así,

$$m_L=-\frac{3}{2}, \qquad \text{de aquí,} \qquad m_L m_{L_1}=-1 \quad \Longrightarrow \quad \left(-\frac{3}{2}\right)m_{L_1}=-1 \quad \Longrightarrow \quad m_{L_1}=\frac{2}{3}.$$

Luego, le ecuación de la recta L_1 viene dada por

$$L_1: y+1=\frac{2}{3}\left(x+4\right) \quad \Longrightarrow \quad 3y+3=2x+8 \quad \Longrightarrow \quad 2x-3y+5=0.$$

A continuación, buscamos el punto de tangencia, que no es más, que el punto de intersección entre las rectas L y L_1. Para ello, resolvemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x+2y-12=0 \\ 2x-3y+\ \ 5=0 \end{cases}$$

Aplicando uno de los métodos conocidos, método de reducción, método de igualación o el método de sustitución, se obtiene el punto de tangencia $P\left(2,3\right)$.

Así, el radio es la distancia entre el centro, $C_1\left(-4,-1\right)$, y el punto de tangencia $P\left(2,3\right)$

$$r=d\left(C_1,P\right)=\sqrt{\left(-4-2\right)^2+\left(-1-3\right)^2}=\sqrt{36+16}=\sqrt{52} \qquad \Longrightarrow \qquad r^2=52.$$

Luego, la ecuación de la circunferencia es

$$\left(x+4\right)^2+\left(y+1\right)^2=52.$$

★

3. (5 ptos) Hallar el dominio de la función

$$f(x)=\sqrt{\frac{\left|x-3\right|-2}{\left|4-x\right|-1}}-\sqrt[3]{-2x\left(2x-1\right)^4\left|9-x^2\right|}.$$

Solución : La función f tiene sentido si

$$\frac{\left|x-3\right|-2}{\left|4-x\right|-1}\geq 0.$$

Resolvemos esta inecuación. Observemos que, en esta inecuación se tiene combinado, por medio del cociente, dos valores absolutos. Para resolver la misma, aplicamos la definición de valor absoluto para cada valor absoluto que aparezca en la inecuación.

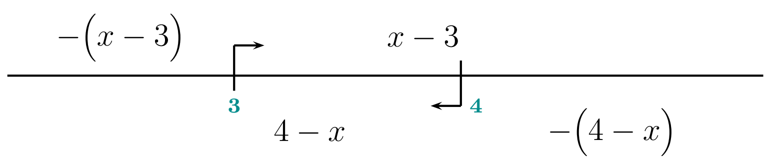
Por la definición de valor absoluto

$$\left|x-3\right|=\begin{cases} x-3 & \text{si } x-3\geq 0 \\ -\left(x-3\right) & \text{si } x-3<0 \end{cases}=\begin{cases} x-3 & \text{si } x\geq \mathbf{3} \\ -\left(x-3\right) & \text{si } x<\mathbf{3} \end{cases}$$

y

$$\left|4-x\right|=\begin{cases} 4-x & \text{si } 4-x\geq 0 \\ -\left(4-x\right) & \text{si } 4-x<0 \end{cases}=\begin{cases} 4-x & \text{si } \mathbf{4}\geq x \\ -\left(4-x\right) & \text{si } \mathbf{4}<x \end{cases}$$

tenemos que, la recta real se secciona en



es decir,

$\left(-\infty,3\right)$	$\left[3,4\right]$	$\left(4,+\infty\right)$
$-\left(x-3\right)$	$x-3$	$x-3$
$4-x$	$4-x$	$-\left(4-x\right)$

Caso I : Intervalo $\left(-\infty,3\right)$.

$$\frac{\left|x-3\right|-2}{\left|4-x\right|-1}\geq 0, \qquad \text{nos queda} \qquad \frac{-\left(x-3\right)-2}{4-x-1}\geq 0$$

resolviendo,

$$\frac{-\left(x-3\right)-2}{4-x-1} \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{-x+3-2}{3-x} \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{-x+1}{3-x} \geq 0.$$

Buscamos los puntos extremos de la expresión, para ello igualamos a cero cada término de los polinomios del numerador y del denominador

- Numerador $-x+1$. De aquí,

$$-x+1=0 \qquad \Longrightarrow \qquad x=1$$

- Denominador $3-x$. De aquí,

$$3-x=0 \qquad \Longrightarrow \qquad x=3$$

Estudiamos el signo de cada uno de los factores

	$-\infty$ a 1	1 a 3	3 a $+\infty$
$1-x$	$+$	$-$	$-$
$3-x$	$+$	$+$	$-$
	$+$	$-$	$+$

entonces,

$$\text{sol}_1 = \left\{ \left(-\infty, 1\right] \bigcup \left(3, +\infty\right) \right\} \bigcap \left(-\infty, 3\right) = \left(-\infty, 1\right].$$

Caso II : Intervalo $\left[\mathbf{3, 4}\right]$.

$$\frac{\left|x-3\right|-2}{\left|4-x\right|-1} \geq 0, \qquad \text{nos queda} \qquad \frac{x-3-2}{4-x-1} \geq 0$$

resolviendo,

$$\frac{x-3-2}{4-x-1} \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x-5}{3-x} \geq 0.$$

Buscamos los puntos extremos de la expresión, para ello igualamos a cero cada término de los polinomios del numerador y del denominador

- Numerador $x-5$. De aquí,

$$x-5=0 \qquad \Longrightarrow \qquad x=5$$

- Denominador $3-x$. De aquí,

$$3-x=0 \qquad \Longrightarrow \qquad x=3$$

Estudiamos el signo de cada uno de los factores

	$-\infty$ a 3	3 a 5	5 a $+\infty$
$x-5$	$-$	$-$	$+$
$3-x$	$+$	$-$	$-$
	$-$	$+$	$-$

entonces,

$$\text{sol}_2 = \left(3,5\right] \bigcap \left[\mathbf{3,4}\right] = \left(3,4\right].$$

Caso III : Intervalo $\left(\mathbf{4,+\infty}\right)$.

$$\frac{\left|x-3\right|-2}{\left|4-x\right|-1} \geq 0, \qquad \text{nos queda} \qquad \frac{x-3-2}{-\left(4-x\right)-1} \geq 0$$

resolviendo,

$$\frac{x-3-2}{-\left(4-x\right)-1} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x-3-2}{-4+x-1} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x-5}{x-5} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 1 \geq 0,$$

siempre y cuando $x \neq 5$. Esta desigualdad es cierta para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{5\right\}$.

Entonces,

$$\text{sol}_3 = \left\{\mathbb{R} \setminus \left\{5\right\}\right\} \bigcap \left(\mathbf{4+\infty}\right) = \left(4,+\infty\right) \setminus \left\{5\right\}.$$

Luego, la solución final es

$$\begin{aligned} \text{sol}_F = \text{sol}_1 \cup \text{sol}_2 \cup \text{sol}_3 &= \left(-\infty,1\right] \cup \left(3,4\right] \cup \left(4,+\infty\right) \setminus \left\{5\right\} \\ &= \left(-\infty,1\right] \cup \left(3,+\infty\right) \setminus \left\{5\right\}. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\text{Dom}\, f : \left(-\infty,1\right] \bigcup \left(3,+\infty\right) \setminus \left\{5\right\}.$$

★

4. (8 ptos) Considere las funciones

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{4x + x^2 + 4} - 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2\left|\operatorname{sen} x \cos x\right| & \text{si} \quad 0 \leq x < \pi \\ -3 & \text{si} \quad x > \pi \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = -3 - \sqrt{2 - x}$$

(a) Obtenga la gráfica, dominio y rango de f.

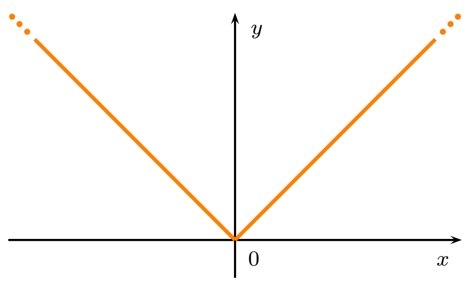
Solución : Por ser f una función a trozos, graficamos cada cada expresión sobre su dominio natural y luego restringimos a su correspondiente intervalo.

(a) Para $y = \sqrt{4x + x^2 + 4} - 1$. Tenemos que,

$$y = \sqrt{4x + x^2 + 4} - 1 = \sqrt{\left(x+2\right)^2} - 1 = \left|x + 2\right| - 1 \qquad \Longrightarrow \qquad y = \left|x + 2\right| - 1.$$

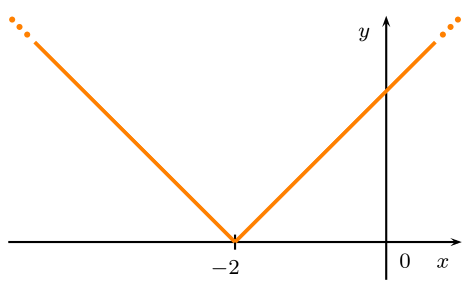
Así, para obtener la gráfica de $y_1 = \left|x + 2\right| - 1$, comenzamos con la función base $y = \left|x\right|$, la trasladamos 2 unidades a la izquierda (traslación horizontal) y, por último, la trasladamos 1 unidad hacia abajo (traslación vertical).

Funció base : $y_1 = \left|x\right|$



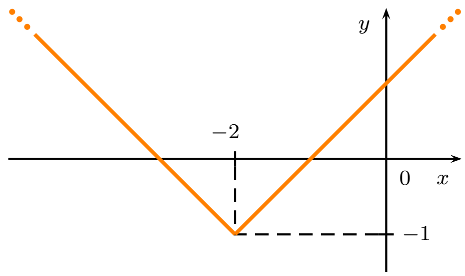
Gráfica de la función $y_1 = \left|x\right|$

Realizamos una traslación horizontal de 2 unidades a la izquierda, se obtiene la gráfica de la función $y_2 = \left|x + 2\right|$



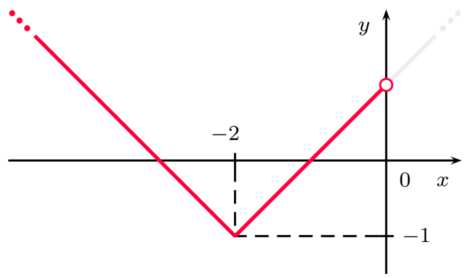
Gráfica de la función $y_2 = \left|x + 2\right|$

Finalmente, realizamos una traslación vertical de 1 unidad hacia abajo, se obtiene la gráfica de la función $y = \left|x + 2\right| - 1$



Gráfica de la función $y = \left| x + 2 \right| - 1$

Puesto que, la función $y = \left| x+2 \right| - 1$ está definida, en f, para $x < 0$, entonces restringimos dominio



Gráfica de $y = \left| x + 2 \right| - 1$, para $x < 0$

(b) Para $y = 2 \left| \operatorname{sen} x \cos x \right|$. Tenemos que,

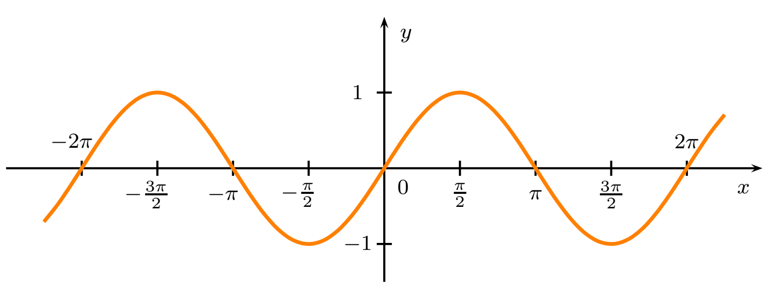
$$y = 2 \left| \operatorname{sen} x \cos x \right| = \left| 2 \right| \left| \operatorname{sen} x \cos x \right| = \left| 2 \operatorname{sen} x \cos x \right| = \left| \operatorname{sen}\left(2x\right) \right|,$$

es decir

$$y = \left| \operatorname{sen}\left(2x\right) \right|.$$

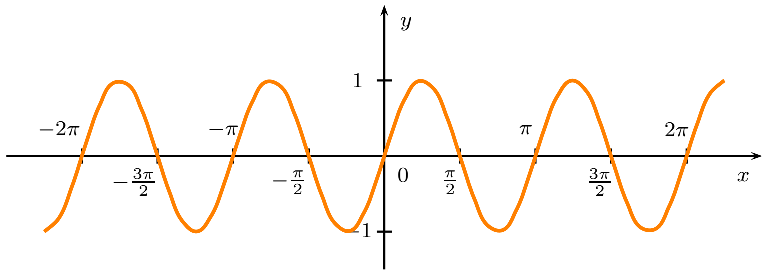
Así, para obtener la gráfica de $y = \left| \operatorname{sen}\left(2x\right) \right|$, comenzamos con la función base $y_1 = \operatorname{sen} x$, realizamos una compresión de 2 unidades, es decir, como $c = 2 > 1$, la gráfica de y_1 se comprime horizontalmente por el factor $\frac{1}{2}$ y, por último, reflejamos la parte negativa de la gráfica con respecto al eje x, (transformación realizada por el valor absoluto).

Funció base : $y_1 = \operatorname{sen} x$



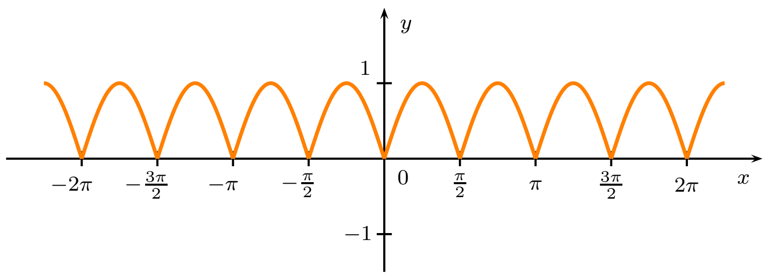
Gráfica de la función $y_1 = \operatorname{sen} x$

Se comprime 2 unidades, es decir, como $c = 2 > 1$, la gráfica de y_1 se comprime horizontalmente por el factor $\dfrac{1}{2}$



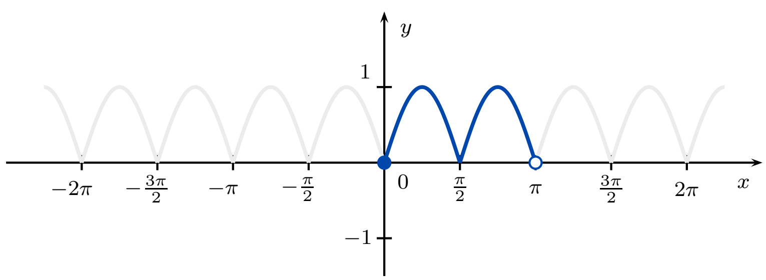
Gráfica de la función $y_2 = \operatorname{sen}\big(2x\big)$

Aplicamos el valor absoluto, es este caso la parte negativa de la gráfica de $y_2 = \operatorname{sen}\big(2x\big)$, se refleja respecto al eje x, es decir, se vuelve positiva.



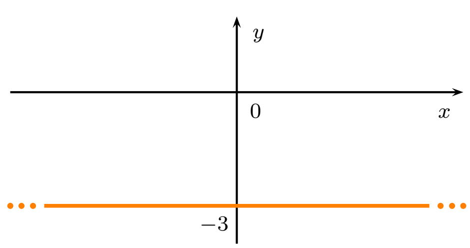
Gráfica de la función $y = \Big|\operatorname{sen}\big(2x\big)\Big|$

Puesto que, la función $y = \Big|x + 2\Big| - 1$ está definida, en f, para $0 \leq x < \pi$, entonces restringimos dominio



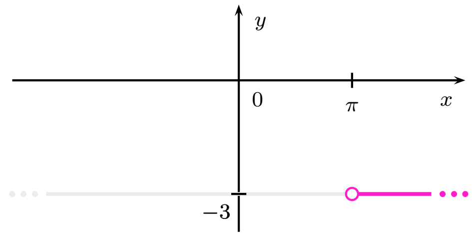
Gráfica de $y = \Big|\operatorname{sen}\big(2x\big)\Big|$, para $0 \leq x < \pi$

(c) Para $y = -3$. La función constantemente igual a -3



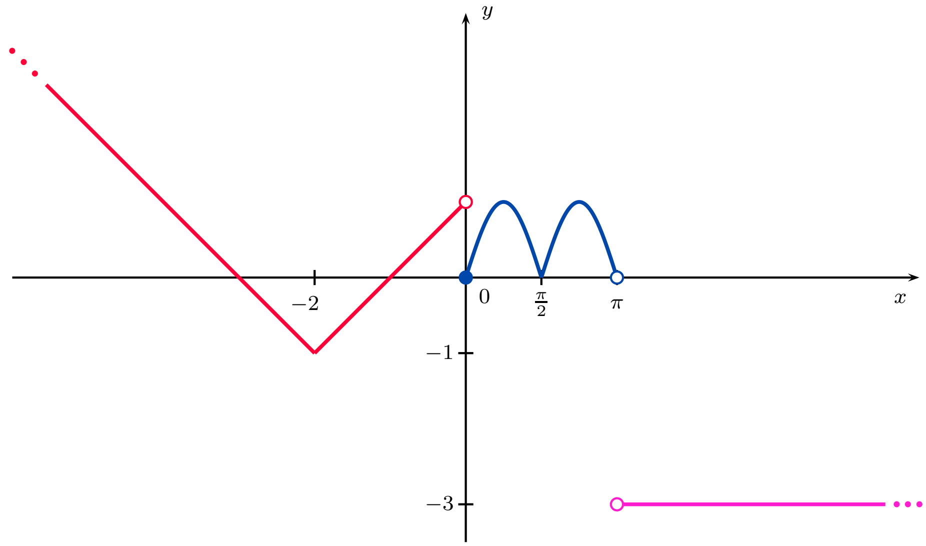
Gráfica de la función $y = -3$

Puesto que, la función $y = -3$ está definida, en f, para $x > \pi$, entonces restringimos dominio



Gráfica de $y = -3$, para $x > \pi$

De aquí, la gráfica de f



Gráfica de la función f

De la gráfica se obtiene que

$$\operatorname{Dom} f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \pi \right\} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Rgo} f : \left[-1, +\infty \right) \bigcup \left\{ -3 \right\}$$

★

4. (8 ptos) Considere las funciones

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{4x + x^2 + 4} - 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2\left|\operatorname{sen} x \cos x\right| & \text{si} \quad 0 \leq x < \pi \\ -3 & \text{si} \quad x > \pi \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = -3 - \sqrt{2 - x}$$

(b) Hallar $f \circ g$, en caso de ser posible. Indique dominio y rango de la misma.

Solución : Para poder realizar la composición $f \circ g$ se debe cumplir que

$$\operatorname{Dom} f \bigcap \operatorname{Rgo} g \neq \varnothing.$$

Hallamos el rango de g. Para ello, obtenemos su dominio, la función f tiene sentido si

$$2 - x \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 2 \geq x \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{Dom} g : x \in \left(-\infty, 2\right].$$

Así,

$$2 \geq x \quad \xRightarrow{\substack{\text{Multiplicamos por } -1 \\ \text{(la desigualdad cambia)}}} \quad -2 \leq -x \quad \xRightarrow{\substack{\text{Sumamos } 2 \\ \text{(la desigualdad se mantiene)}}} \quad 2 - 2 \leq 2 - x \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq 2 - x$$

$$\xRightarrow{\substack{\text{Aplicamos } \sqrt{(\cdot)} \\ \text{(la desigualdad se mantiene)}}} \quad \sqrt{0} \leq \sqrt{2 - x} \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \sqrt{2 - x} \quad \xRightarrow{\substack{\text{Multiplicamos por } -1 \\ \text{(la desigualdad cambia)}}} \quad 0 \geq -\sqrt{2 - x}$$

$$\xRightarrow{\substack{\text{Sumamos } -3 \\ \text{(la desigualdad se mantiene)}}} \quad -3 \geq -3 - \sqrt{2 - x} \quad \Longrightarrow \quad -3 \geq g(x),$$

de aquí,

$$\operatorname{Rgo} g : \left(-\infty, -3\right].$$

Luego

$$\operatorname{Dom} f \bigcap \operatorname{Rgo} g = \left\{\mathbb{R} \setminus \left\{\pi\right\}\right\} \bigcap \left(-\infty, -3\right] = \left(-\infty, -3\right] \neq \varnothing,$$

la composición se puede realizar.

Tenemos que, ya que $\operatorname{Rgo} g : \left(-\infty, -3\right]$, entonces

$$\left(f \circ g\right)(x) = f\left(g(x)\right) = -\left(-3 - \sqrt{2 - x} + 2\right) - 1 = -\left(-1 - \sqrt{2 - x}\right) - 1$$

$$= 1 + \sqrt{2 - x} - 1 = \sqrt{2 - x}$$

y

$$\operatorname{Dom} f \circ g : \Big(-\infty, 2\Big] \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Rgo} f \circ g : \Big[0, +\infty\Big)$$

★

5. (2 ptos c/u) Responda **VERDADERO** o **FALSO** las siguientes proposiciones. Recuerde **JUSTIFICAR TODAS SUS RESPUESTAS.**

(a) Sean f una función impar y g una función par. Considere la función

$$h(x) = g^n(x)\, f^m(x)\, f^k(x),$$

donde $n, m, k \in \mathbb{N}$ con m par y k impar, entonces h es una función par.

Solución : Por hipótesis, se tiene que

- Como g es una función par, entonces

$$g(-x) = g(x),$$

por lo tanto,

$$g^n(-x) = \Big(g(-x)\Big)^n = \Big(g(x)\Big)^n = g^n(x) \qquad \Longrightarrow \qquad g^n(-x) = g^n(x),$$

es decir, g^n es una función par.

- Como f es una función impar, entonces

$$f(-x) = -f(x),$$

de aquí, como m par, entonces

$$f^m(-x) = \Big(f(-x)\Big)^m = \Big(-f(x)\Big)^m = \Big(-1\Big)^m \Big(f(x)\Big)^m = \Big(f(x)\Big)^m = f^m(x),$$

con lo que,

$$f^m(-x) = f^m(x),$$

es decir, f^m es una función par.

Por otra parte, como k impar, entonces

$$f^k(-x) = \Big(f(-x)\Big)^k = \Big(-f(x)\Big)^k = \Big(-1\Big)^k \Big(f(x)\Big)^k = -\Big(f(x)\Big)^k = -f^k(x),$$

con lo que,

$$f^k(-x) = -f^k(x),$$

es decir, f^k es una función impar.

Tenemos, entonces

$$\begin{aligned} h(-x) = g^n(-x)\, f^m(-x)\, f^k(-x) &= g^n(x)\, f^m(x) \Big(-f^k(-x)\Big) \\ &= -g^n(x)\, f^m(x)\, f^k(-x) = h(x). \end{aligned}$$

Luego, h es una función es impar, por lo que, la proposición es **FALSA**. ★

5. (2 ptos c/u) Responda **VERDADERO** o **FALSO** las siguientes proposiciones. Recuerde **JUSTIFICAR TODAS SUS RESPUESTAS.**

(b) Las funciones $f(x) = \sqrt{3x+5}$ y $g(x) = \dfrac{x^2-5}{3}$ son funciones inversas entre sí.

Solución : Tenemos que

$$\big(f \circ g\big)(x) = f\big(g(x)\big) = f\left(\frac{x^2-5}{3}\right) = \sqrt{3\left(\frac{x^2-5}{3}\right)+5} = \sqrt{x^2-5+5} = \sqrt{x^2} = \big|\,x\,\big| \neq x.$$

Luego, las funciones f y g **NO** son funciones inversas entre sí, por lo que, la proposición es **FALSA**.

★